

Méth. Mat. Phys. - Chapitre 8

Equations différentielles ordinaires



8.1 Equations différentielles ordinaires du deuxième ordre

8.2 Méthode de Frobenius

8.3 Méthode du wronskien

8.4 Méthode de Green

8.5 Polynômes de Laguerre

8.6 Oscillateur harmonique forcé

- **Equation différentielle ordinaire** : linéaire inhomogène d'ordre n

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = f(x) \quad (8.1)$$

- **Equation différentielle ordinaire** : linéaire inhomogène d'ordre 2

(8.2)

- **Solution générale** : EDO - linéaire inhomogène d'ordre 2

(8.20)

où c_1 et c_2 fixés par les conditions au bord et $y_p(x)$ solution particulière.

- **Equation différentielle ordinaire** : linéaire homogène d'ordre 2

(8.3)

- **Solution générale** : EDO - linéaire homogène d'ordre 2

(8.19)

- **Solution générale** : ansatz : développement en série autour de $x_0 \neq 0$

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^{s+j} \quad \text{où} \quad s \geq 0 \quad \text{et} \quad a_0 \neq 0 \quad (8.24)$$

- **Solution générale** : ansatz : développement en série autour de $x_0 = 0$

(8.25)

- 1 Polynômes d'Hermite : $H_n(x)$
- 2 Polynômes de Laguerre : $L_n(x)$
- 3 Polynômes de Legendre : $P_\ell(x)$
- 4 Fonctions de Bessel : $J_m(x)$

- **Méthode de Frobenius** :

- 1 Equation différentielle homogène développée en séries de puissances
- 2 Décalage de l'indice muet j (puissances identiques)
- 3 Equation indiciale (paramètre s) et relation de récurrence (coefficients a_j)

- **Equation différentielle ordinaire** : homogène linéaire d'ordre 2

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \quad (8.3)$$

- **Solution générale et dérivée première** : homogène d'ordre 2

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \quad (8.34)$$

- **Solution générale et dérivée première** : écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

- **Wronskien** : non-nul : $y_1(x)$ et $y_2(x)$ linéairement indépendants

$$(8.36)$$

- **Dérivée du wronskien :** où $y_1'(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2'(x) = 0$

$$W'(x) = y_1(x) y_2''(x) - y_1''(x) y_2(x) \quad (8.37)$$

- **Equation différentielle ordinaire :** solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$

$$y_1''(x) + p_1(x) y_1'(x) + p_0(x) y_1(x) = 0$$

$$y_2''(x) + p_1(x) y_2'(x) + p_0(x) y_2(x) = 0 \quad (8.38)$$

- **Equation différentielle ordinaire du wronskien :** homogène d'ordre 1

$$W'(x) = -p_1(x) W(x) \quad (8.40)$$

- **Primitive de l'équation différentielle ordinaire :** variable muette x'

$$\int^{W(x)} \frac{dW(x')}{W(x')} = - \int^x p_1(x') dx' \quad (8.41)$$

- **Solution de l'équation différentielle ordinaire :**

$$\ln(W(x)) = - \int^x p_1(x') dx'$$

- **Wronskien** : défini à une constante près

$$(8.42)$$

- **Wronskien** : remis en forme

$$W(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x) = y_1(x)^2 \left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right)' \quad (8.43)$$

- **Equation différentielle ordinaire** : rapport des solutions

$$\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right)' = \frac{W(x)}{y_1(x)^2} \quad (8.44)$$

- **Deuxième solution** :

$$(8.45)$$

- **Deuxième solution** : cas particulier : $p_1(x') = 0$ alors $W(x') = 1$

$$(8.46)$$

- **Equation différentielle ordinaire** : inhomogène linéaire d'ordre 2

$$\mathcal{L} y(x) = y''(x) + p_1(x) y'(x) + p_0(x) y(x) = f(x) \quad (8.48)$$

où la solution particulière $y_p(x)$ est donnée par les fonctions de Green $G(x - x')$.

- **Source ponctuelle** :

$$f(x) = f_0 \delta(x - x') \quad (8.50)$$

- **Equation de Green** : $\mathcal{L} G(x - x') = \delta(x - x')$ (8.51)

$$(8.52)$$

- **Fonction de Green** : causalité

$$(8.53)$$

- **Fonction de Green** : en $x = x'$ par continuité

$$A(x') y_1(x') + B(x') y_2(x') = 0 \quad (8.54)$$

- **Intégrale** : équation de Green

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} \left(G''(x - x') + p_1(x) G'(x - x') + p_0(x) G(x - x') \right) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} \delta(x - x') dx = 1 \end{aligned} \quad (8.56)$$

- **Continuité de la fonction de Green** : en $x = x'$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} p_0(x) G(x - x') dx = 0 \quad (8.57)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} p_1(x) G'(x - x') dx = \quad (8.58)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_1(x) G(x - x') \Big|_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} p_1'(x) G(x - x') dx = 0$$

- **Intégrale** : équation de Green (8.57) et (8.58) dans (8.56)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} G''(x - x') dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G'(x - x') \Big|_{x' - \varepsilon}^{x' + \varepsilon} = 1 \quad (8.59)$$

- **Fonction de Green** : dérivée première par rapport x

$$G'(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x' \\ A(x') y_1'(x) + B(x') y_2'(x) & \text{si } x > x' \end{cases} \quad (8.55)$$

- **Dérivée à droite de la fonction de Green** : en $x = x'$ (8.59)

$$A(x') y_1'(x') + B(x') y_2'(x') = 1 \quad (8.60)$$

- **Système matriciel** : en $x = x'$ (8.54) et (8.60)

$$\begin{pmatrix} y_1(x') & y_2(x') \\ y_1'(x') & y_2'(x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(x') \\ B(x') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

- **Coefficients** : en $x = x'$

$$\begin{pmatrix} A(x') \\ B(x') \end{pmatrix} = \frac{1}{W(x')} \begin{pmatrix} y_2'(x') & -y_2(x') \\ -y_1'(x') & y_1(x') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y_2(x')}{W(x')} \\ \frac{y_1(x')}{W(x')} \end{pmatrix} \quad (8.62)$$

- **Fonction de Green** : (8.62) dans (8.53) et causalité

$$(8.63)$$

- **Solution particulière** : source quelconque $f(x)$

$$y_p(x) = (G * f)(x) = \int^x G(x - x') f(x') dx' \quad (8.64)$$

- **Solution particulière** : fonction des solutions du système homogène

$$(8.38)$$

- **Méthode de résolution des EDO** :

- 1 Première solution homogène $y_1(x)$: calcul ou ansatz
- 2 Deuxième solution homogène $y_2(x)$: méthode du wronskien
- 3 Solution particulière $y_p(x)$: méthode de Green

- **Equation de Laguerre** : partie radiale de l'équation de Schrödinger pour l'électron d'un atome d'hydrogène

$$(8.66)$$

- **Méthode de Frobenius** :

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{s+j} \quad \text{où} \quad a_0 \neq 0 \quad (8.67)$$

- **Equation de Laguerre** : séries de puissances (8.67) dans (8.66)

$$\begin{aligned} & x \sum_{j=0}^{\infty} (s+j-1)(s+j) a_j x^{s+j-2} \\ & + (1-x) \sum_{j=0}^{\infty} (s+j) a_j x^{s+j-1} + n \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{s+j} = 0 \end{aligned} \quad (8.68)$$

- **Séries de puissances** : (8.68) remis en forme

$$\sum_{j=0}^{\infty} (s+j)^2 a_j x^{s+j-1} - \sum_{j=0}^{\infty} (s+j-n) a_j x^{s+j} = 0 \quad (8.69)$$

- **Séries de puissances** : (8.41) 1^{ère} somme : $j \rightarrow j + 1$

$$s^2 a_0 x^{s-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \left((s + j + 1)^2 a_{j+1} - (s + j - n) a_j \right) x^{s+j} = 0 \quad (8.70)$$

- **Equation indicelle** : facteur de x^{s-1} nul dans (8.70)

$$(8.71)$$

- **Relation de récurrence** : facteur de x^{s+j} nul dans (8.70) avec $s = 0$

$$(8.73)$$

- **Premiers coefficients** : (8.44)

$$a_1 = \frac{-n}{1^2} a_0 = \frac{(-1)n}{(1!)^2} a_0$$

$$a_2 = \frac{1-n}{2^2} a_1 = \frac{(-1)^2 n(n-1)}{(2!)^2} a_0 \quad (8.74)$$

$$a_3 = \frac{2-n}{3^2} a_2 = \frac{(-1)^3 n(n-1)(n-2)}{(3!)^2} a_0$$

- **Dernier coefficient** : (8.73) où $j = n$

$$a_{n+1} = \frac{n - n}{(n + 1)^2} a_n = 0 \quad (8.75)$$

Par récurrence, tous les coefficients a_j où $j > n$ sont nuls.

- **Coefficients quelconques** : (8.45) – (8.48) où $0 < j \leq n$

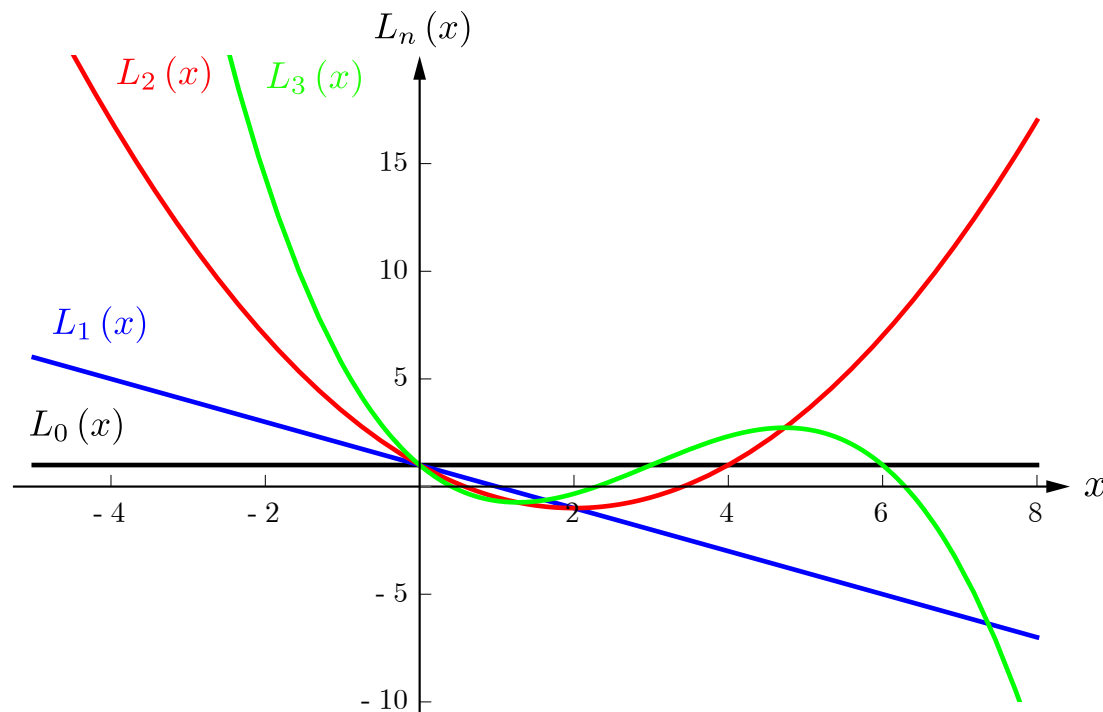
$$\begin{aligned} a_j &= \frac{(-1)^j n(n-1)\dots(n-j+1)}{(j!)^2} a_0 \\ &= \frac{(-1)^j n(n-1)\dots(n-j+1)(n-j)(n-j-1)\dots 2 \cdot 1}{(n-j)(n-j-1)\dots 2 \cdot 1 (j!)^2} a_0 \\ &= \frac{(-1)^j n!}{(n-j)!(j!)^2} a_0 = \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n}{j} a_0 \end{aligned} \quad (8.76)$$

- Polynôme de Laguerre : (8.67) avec $a_0 = 1$, $s = 0$ et $0 < j \leq n$

(8.77)

$$L_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad L_2(x) = \frac{1}{2!} (x^2 - 4x + 2)$$

$$L_1(x) = -x + 1 \quad \text{et} \quad L_3(x) = \frac{1}{3!} (-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$$



- **Oscillateur harmonique forcé :**

$$(8.80)$$

- **Solutions :** système homogène : $f(t) = 0$

$$(8.83)$$

- **Equation caractéristique :** (8.83) dans (8.80) où $f(t) = 0$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (8.84)$$

- **Coefficients caractéristiques :** amortissement faible : $\gamma < \omega_0$

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \equiv -\gamma \pm i\omega \quad \text{ainsi} \quad \lambda_+ + \lambda_- = -2\gamma \quad (8.85)$$

- **Première solution :** système homogène : $f(t) = 0$

$$(8.87)$$

- **Wronskien :** où $p_1(t') = 2\gamma$

$$W(t) = \exp\left(-\int^t 2\gamma dt'\right) = e^{-2\gamma t} \quad (8.88)$$

- **Deuxième solution** : système homogène : où $\lambda_- = - (2\gamma + \lambda_+)$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= e^{\lambda_+ t} \int^t \frac{e^{-2\gamma t'}}{(e^{\lambda_+ t'})^2} dt' = e^{\lambda_+ t} \int^t e^{-2(\gamma + \lambda_+)t'} dt' \\
 &= -\frac{e^{\lambda_+ t} e^{-2(\gamma + \lambda_+)t}}{2(\gamma + \lambda_+)} = -\frac{e^{-(2\gamma + \lambda_+)t}}{2\gamma + 2\lambda_+} = -\frac{e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad (8.89)
 \end{aligned}$$

- **Deuxième solution** :

$$(8.90)$$

- **Fonction de Green** : (8.87), (8.88) et (8.90) dans (8.63) et causalité

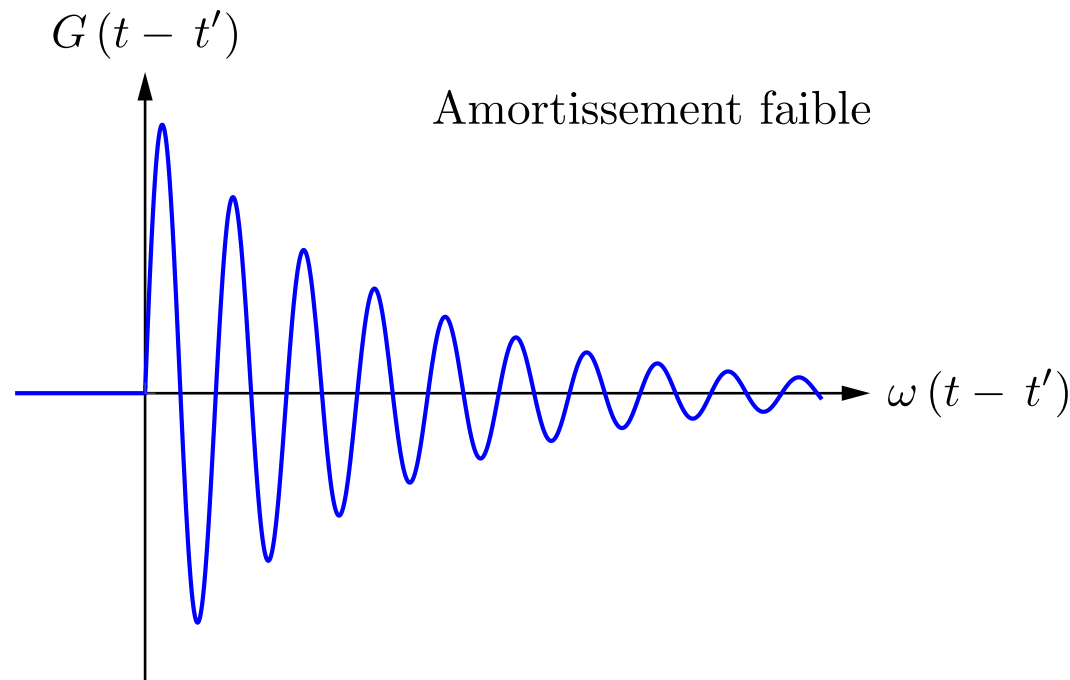
$$\begin{aligned}
 G(t - t') &= -\frac{x_1(t) x_2(t') - x_2(t) x_1(t')}{W(t')} \Theta(t - t') \quad (8.91) \\
 &= e^{-\gamma(t-t')} \frac{e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')} - e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t')}}{2i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \Theta(t - t')
 \end{aligned}$$

- **Amortissement faible** : $\gamma < \omega_0$: pulsation

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (8.92)$$

- **Fonction de Green** : amortissement faible $\gamma < \omega_0$: (8.92) dans (8.91)

$$G(t - t') = e^{-\gamma(t-t')} \frac{\sin(\omega(t-t'))}{\omega} \Theta(t - t') \quad (8.93)$$

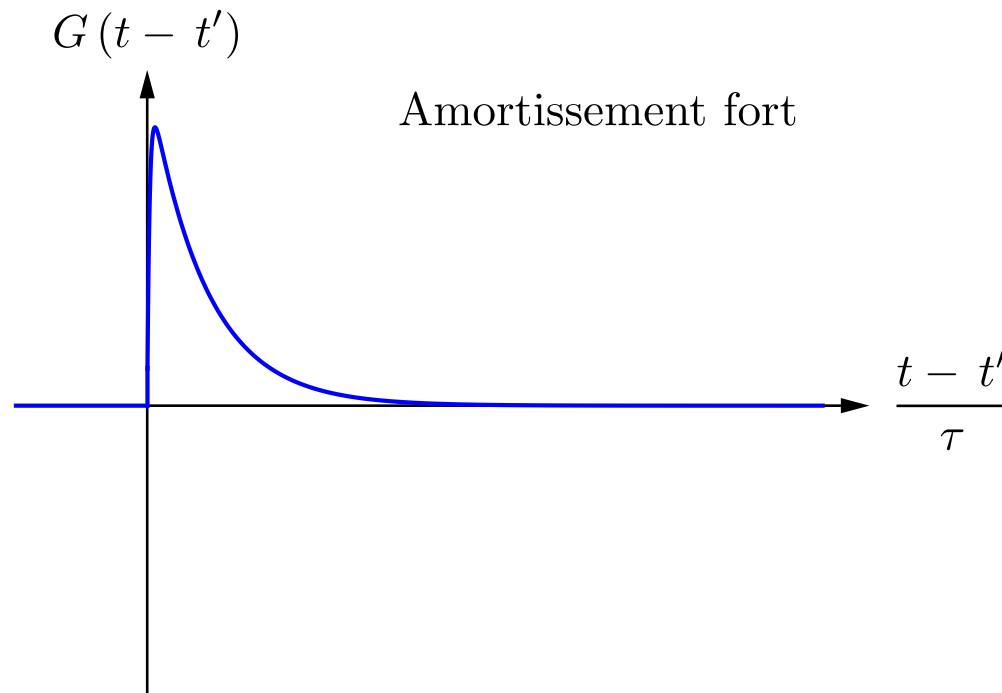


- **Amortissement fort** : $\gamma > \omega_0$: temps d'amortissement

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \quad (8.94)$$

- **Fonction de Green** : amortissement faible $\gamma < \omega_0$: (8.94) dans (8.91)

$$G(t - t') = e^{-\gamma(t-t')} \tau \sinh\left(\frac{t-t'}{\tau}\right) \Theta(t-t') \quad (8.95)$$



L'implémentation des méthodes du wronskien et de Green est nettement plus simple et directe que le calcul de l'intégrale de contour d'une transformation de Fourier inverse à l'aide du théorème des résidus effectués en sect. 7.6 ! Les fonctions de Green ainsi obtenues sont les mêmes...